不完全楕円積分

不完全楕円積分は色々な表記方法があり最新の注意が必要です。
カルキングでは3通りの定義に基づく表記法を用意しています。
引数の区切り記号に注意してください。
区切り記号を別の区切り記号に変更しないでください。
同じ関数名Fを使っていますが、内部表現は全て異なっています。
(注:書籍によっては不完全楕円積分と言わずに単に楕円積分ということもあります。)

第一種不完全楕円積分

$$F(\phi\ ,k\ )=\int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}d\theta$$

ϕ :実数
k:複素数

$$F(x\ ;k\ )=\int_0^{x}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

t = sin θ x = sin φ

$$F(\phi\ \backslash\alpha\ )=\int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\alpha\sin\theta)^2}}d\theta$$

計算例

F(0.3 ,0.8)=0.302902599898209

同じ引数値を与えても以下のようにセミコロン区切りの関数の計算値は異なります。

F(0.3 ;0.8)=0.307734343459238

同じ計算値を得るためには以下のようにsin関数の操作が必要です。

F(sin(0.3) ;0.8)=0.302902599898209

; タイプのFを基準に考えると計算が違うため、以下のように $\sin^{-1}$ の操作が必要になります。

F(0.6 ;0.8)=0.67290466152868

F($\sin^{-1}$(0.6) ,0.8)=0.67290466152868

$F(0.3 \backslash 0.5)=0.301025197178559$

高精度計算例

$F(0.3,0.8)=0.3029025998982091398621197800024450146075971296428158063403187263003949941849326229592556905485006296$

k が複素数の時の高精度計算例

$F(0.3,0.8+2.5i)=0.27816466577448146396058351337212861480569028548055137060892824039933619296564616992208740344951535 09 + 0.01203519260183524962700054064178754319199437006448209542896176639468589839027569973965304467627338854i$

以下のような定義が使われることがあります。
カルキングでは｜区切り記号は第一種では使いません。

$$F(\phi|m)=\int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{(1-m\sin^2\theta)}}d\theta$$

$m=k^2$ として$F(\phi,k^2)$を代わりに使ってください。

第二種不完全楕円積分

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}\,d\theta$$

ϕ :実数
k :複素数

$$E(x;k)=\int_0^{x}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{(1-t^2)}}dt$$

$t=\sin\theta \quad x=\sin\phi$

$$E(\phi\backslash\alpha)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-(\sin\alpha\sin\theta)^2}\,d\theta$$

引数の区切り記号の扱いは第一種不完全楕円積分に準じます。

計算例

$E(0.3,0.5)=0.298891411016533$

$E(0.3\,;0.5)=0.30353176542728$

$E(0.3\,\backslash 0.5)=0.298981042078219$

高精度計算　　　注:多少時間がかかります。

$E(0.3,0.5)=0.298891411016498599402892475401513242147503791904705732355175557273253320749308013336326239771830625 7$

高精度複素数計算　　　注:多少時間がかかります。

$E(0.3,0.5+2i)=0.316008709418509184621170323340910050277040890443 62 - 0.008085175392125381504438290292721815189900735340 2698i$

第三種不完全楕円積分

$$\Pi(n\,;\phi\,,k)=\int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}\,(1-n\sin^2\theta)}d\theta$$

n , ϕ , k:実数

$$\Pi(n\,;\phi\,|m)=\int_0^{\sin\phi}\frac{1}{1-nt^2}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}dt$$

$$\Pi(n\,;\phi\,\backslash\alpha)=\int_0^{\phi}\frac{1}{1-n\sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\alpha\sin\theta)^2}}d\theta$$

計算例

$$\Pi\left(\frac{1}{3}\,;\pi/5\,,\sqrt{0.3}\right)=0.668734807465291$$

$$\Pi\left(\frac{1}{3}\,;\pi/5\,|\,0.3\right)=0.668734807465291$$

$$\Pi(-0.7\,;0.6\,\backslash 0.5)=0.565666453272373$$

解説書の中には以下のような定義がされている場合もあります。

$$\Pi(n,x,k)=\int_0^x \frac{1}{1-nt^2}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

$x=\sin\phi$　　　$k=\sqrt{m}$

このように x , k を定義して、$\Pi(n,x,k)$ を計算すれば、$\Pi(n\,;\phi\,|m)$ と同じ解になります。

例　　$n=\frac{1}{3}$　　$\phi=\frac{\pi}{5}$　　$m=0.3$

$\Pi(n\,;\phi|\,m)=0.668734807465389$

$x=\sin\phi$　　　$k=\sqrt{m}$　　　このようにx,kを定義すると

$$\int_0^x \frac{1}{1-nt^2}\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt=0.668734807465333$$

（この定積分の精度の限界で完全には一致していません。）