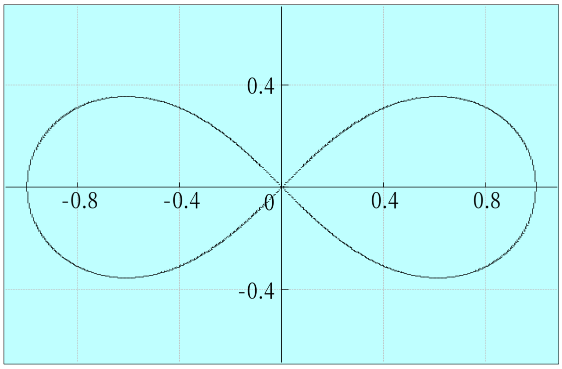
楕円積分の応用2

ベルヌーイのレムニスケートの周長

極座標

$$r^2=\cos 2\theta \qquad (1)$$

陰関数グラフ



x-y座標系

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

この式の陰関数グラフが右のグラフになります。

ベルヌーイのレムニスケートの周長

$$\int\sqrt{dr^2+(rd\theta)^2}=\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr \qquad (2)$$

$$r^2=\cos 2\theta$$

θ を r の関数とみなし、両辺を θ で微分する。

このために

$\theta(r)=\varnothing$ 　関数定義

$$2r=-2\sin 2\theta\frac{d\theta}{dr}$$

両辺を二乗して共通式を削除すると、下記の式が得られる。

$$r^4=\sin^2 2\theta r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2$$

したがって

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2=\frac{r^4}{\sin^2 2\theta}$$

(1)式の両辺を二乗する

$$r^4=\cos^2 2\theta$$

したがって

$$r^4=1-\sin^2 2\theta$$

$$\sin^2 2\theta=1-r^4$$

(2)式は以下のように変形できる。

$$\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{\sin^2 2\theta}}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{1-r^4}}dr$$

よって

$$\int\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}dr=\int\sqrt{1+\frac{r^4}{1-r^4}}dr=\int\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$$

レムニスケートの周長

$$L=\int\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr$$

第一種楕円関数の 別の定義

$$K(k)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$

したがって

$$L=2K(i)=2.6220575542921$$