

< 統計区間推定 >

正規母集団における母平均の区間推定(母分散既知)

【設問】 標本数 $n = 25$ 標本の平均 $\bar{x} = 8.493$

母分散 $v = 0.1225$

このとき,

信頼係数 $= 0.95$

として, 母平均 m の信頼区間を推定せよ。

【計算】 $w = \text{norminv}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{v}{n}}$

を定めると, 区間推定は

$$[\bar{x} - w, \bar{x} + w] = \{8.356, 8.630\}$$

参考:

平均値と下限, 上限の3つの値をまとめて, 次のような表記も可能。

$$8.493_{8.630}^{8.356}$$

【要点】 標本の平均値を表す変数を \bar{X} とすると, その分散 V は

$$V = \frac{v}{n} \quad (1)$$

次式により変数 Z を定めると, Z は $N(0, 1)$ に従う。

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{V}} \quad (2)$$

さて, $P(-z \leq Z \leq z) =$

となる z を求める。

$$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}$$

それゆえ, $z = \text{norminv}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$

区間 $(-z \leq Z \leq z)$ に式(2)を適用しすると

$$\bar{X} - z\sqrt{V} \leq m \leq \bar{X} + z\sqrt{V} \quad (3)$$

式(3)に式(1)を代入すると

$$\bar{X} - z\sqrt{\frac{v}{n}} \leq m \leq \bar{X} + z\sqrt{\frac{v}{n}}$$

信頼区間は \bar{X} にその実現値である \bar{x} の値を代入して求められる。